YERÇEKİMİ AKIMLARININ SİMETRİ GRUP ANALİZİ VE BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ

*Derya Şahin *, Nalan Antar *, Teoman Özer ***

** İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen –Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü*
*** İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü*

ÖZET

Yoğunlukları birbirinden farklı iki akışkandan birinin diğerinin içine doğru yerçekiminin etkisiyle akması ile oluşan ve bazen yoğunluk akımları diye de adlandırılan yerçekimi akımları, birçok doğal ve insan yapımı durumda ortaya çıkmaktadır. Literatürde sabit hacimli bir sıvı tarafından üretilen yerçekimi akımlarıyla ilgili çalışmalara bakıldığında kullanılan en genel yaklaşımın boyut analiz yaklaşımı olduğu görülür. Boyut analizi sığ su denklemlerinin benzerlik analizin kullanılan tek yöntemdir ve tek bir benzerlik değişkeninin elde edilmesini mümkün kılmaktadır. Bu çalışma içerisinde boyut analizine alternatif bir yaklaşım olarak Lie grup teorisi kullanılmıştır ve Lie grup teorisinin, Boyut analizinin bir genelleştirilmesi olduğu gösterilmiştir. Bu çalışma içerisinde kullanılan bu yeni yaklaşım, mevcut ve benzeri problemlerin incelenmesinde, Lie grup teorisinin çok daha genel ve trivial olmayan benzerlik yapıları ve benzerlik çözümlerinin elde edilebilmesinde kullanılabileceğini göstermektedir.

ABSTRACT

Gravity currents, (sometimes called density currents or buoyancy currents), which consist of fluid of one density flowing under the influence of gravity into fluid of another density, occur in many natural and man-made situations. In the literature, dimensional analysis is the most common method for the gravity currents which are occured by the fixed volume fluids. All of the studies in the current literature are related to the self-similarity analysis of the shallow-water related problems based on the dimensional analysis. In fact, the dimensional analysis enables to find only one particular type of similarity variable. In this study, Lie group theory was used as an alternative approach of dimensional analysis approximations and Lie group theory was shown as the generalization of the dimensional analysis. This new approach mentioned in this study presents the opportunity to obtain more general and nontrivial similarity forms and similarity solutions for the problem.

1.GİRİŞ

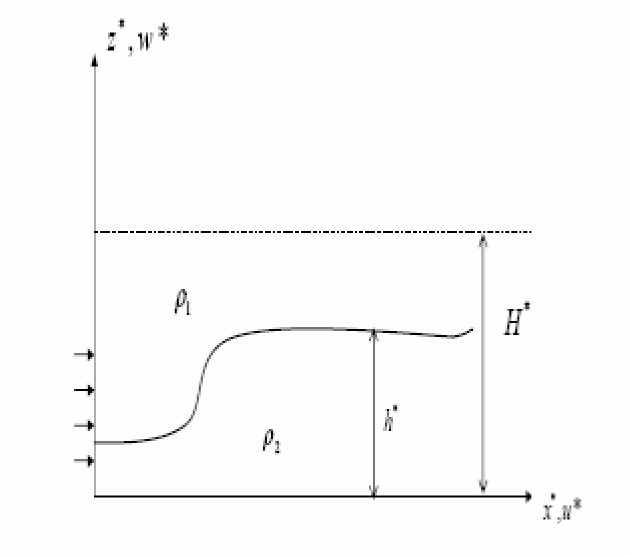
Birçok deneysel ve teorik çalışmada sabit hacimli bir sıvı tarafından üretilen yerçekimi akımlarının davranışları incelenmektedir. Yerçekimi akımlarıyla ilgili en geniş kapsamlı gözlemleri Simpson [1] elde etmiştir. Yerçekimi akımlarının hareketini analiz etmek için sığ su teorisi kullanılır ve bu nedenle sığ su denklemlerinden yararlanılır. Literatürde, sabit hacime sahip yerçekimi akımlarının davranışı bir çok araştırmacı tarafından incelenmiş olmasına rağmen hacmi zamana bağlı olarak artan yerçekimi akımlarının zaman içerisindeki yayılma oranı daha az araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Grundy ve Rottman [2], t zaman ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere t^{α} şeklinde bir kaynağa sahip akışkanın hareketi başlatıldığında yerçekimi akımlarını temsil eden sığ su denklemlerinin çözümlerinin varlığı incelemişlerdir. Gratton ve Vigo [3] belli bir yoğunluğa sahip bir sıvı içerisine, daha yoğun bir sıvı girişinin yapılması sonucunda oluşan değişken akımlı yerçekimi akımlarını düzlemsel olarak araştırmışlar ve çalışmalarında giren sıvı hacminin zamana bağlı olarak değiştiğini göstermişlerdir.

Değişken akımlı yerçekimi akımlarına karşılık gelen sığ su denklemlerinin benzerlik çözümleri ve bu çözümlerin varlığı, söz konusu akımların t^{α} oranında bir hacme sahip olduğunu göstermektedir. Elde edilen benzerlik çözümleri adi diferansiyel denklemlerin çözümleri şeklindedir.

Sığ su denklemlerinin indirgenmiş formlarını ve benzerlik değişkenini elde etmede kullanılan en genel teknik boyut analizidir. Fakat boyut analizi yardımıyla sadece tek tipte bir benzerlik değişkeni ve indirgenmiş form bulunabilmektedir. Bu nedenle boyut analizi kullanılan bu tür çalışmalarda [4,5] benzerlik değişkeni δ sayısal bir sabit olmak üzere, $\xi = bx/t^{\delta}$ şeklinde alınmaktadır. Bu yaklaşım sadece belirli bir formda benzerlik çözümünün bulunmasına imkan vermektedir. Lie simetri grup analizi yaklaşımı ile bulunan simetri grupları denklemlerin en genel indirgenmiş yapılarının elde edilmesini mümkün kılmaktadır ve Lie simetri grupları yardımıyla özel bazı çözümler elde edilebilmektedir. Bu çalışmada, Lie simetri grup özellikleri ve sığ su teorisi kullanılarak tek tabakada oluşan yerçekimi yerçekimi akımlarının benzerlik çözümleri araştırılmıştır.

2. TEK TABAKALI SIĞ SU DENKLEMLERİ

Bu çalışma içerisinde, sabit hacimli ρ_1 yoğunluklu akışkanın içerisine $\rho_1 < \rho_2$ olacak şekilde ρ_2 yoğunluklu bir akışkan girişi yapıldığı ve akışkanların birbirine karışmadığı varsayılmıştır.



Şekil 1:Tek Tabakalı Yerçekimi Akımı

H^* toplam derinliği, h^* tabandaki akışkanın derinliği, P^* toplam basınç (P_1^* yüzeydeki basınç ve P_2^* akışkan arasındaki basınç), $u^* = (u^*, w^*)$ olmak üzere u^* yatay eksen boyunca ki akışkanın hızı, w^* eksenel yöndeki akışkanın hızını göstermektedir. $t^* > 0$ ve $x^* = 0$ konumunda bir kaynak tarafından akımın sürekliliğinin sağlandığı varsayılmıştır ve yukarıda Şekil 1'de ele aldığımız model için yüzeyde her yerde basınç aynı ve sabit olduğundan akışkanın yüzeyi denge konumundadır. Yoğunluk farkları $\Delta\rho$ ile gösterilmek üzere $g\,\Delta\rho/\rho$ ifadesine indirgenmiş yerçekimi denir ve g' ile gösterilir. Ayrıca ele aldığımız model için akışkan sıkıştırılamaz olduğundan akışkanın yoğunluğu her yerde sabittir ve dolayısıyla zamana karşı bir değişim göstermez.

Bu çalışmada kullanılan sığ su teorisine göre h_0 akışkanın derinliği, L akışkanın yatay olarak uzunluğu olmak üzere $\delta = \frac{h_0}{L}$, $\delta << 1$ [4-7] kabulü geçerlidir (δ parametresi sığ su parametresi olarak isimlendirilir) ve bu çalışma içerisinde viskozite, yüzeydeki gerilmeler ihmal edilmiştir. Belirtilen bu varsayımlar kullanılarak aşağıdaki hiperbolik tipte bir kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir ve elde edilen bu denklemler tek tabakalı sığ su denklemleridir.

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + g' \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = 0, \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} + h^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = 0 \tag{1.1}$$

(2.1,2) denklem sistemi için

$$u^* = Uu, \quad x^* = Lx, \quad z^* = h_0 z, \quad h^* = h_0 h, \quad t^* = \frac{L}{U} t, \quad \tilde{P}_i^* = U^2 \rho_i \tilde{P}_i, \quad w^* = \frac{Uh_0}{L} w, \quad U^2 = g' h_0 \tag{1.2}$$

şeklindeki boyutsuz büyüklüklerden faydalanıldığı takdirde (2.3) ile gösterilen tek tabakalı sığ su denklemlerinin boyutsuzlaştırılmış hali elde edilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}=0,\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.3}$$

Bu çalışma içerisinde (2.3) denklem sistemi iki farklı sınır koşulu altında incelenmiştir. Birincisi değişken akımın olduğu durumda

$$t>0, u(0,t)=R(t), h(0,t)=S(t) \tag{1.4}$$

şeklindeki sınır koşulu, ikincisi ise değişken akımın olmadığı durumda

$$u(0,t)=0, \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \tag{1.5}$$

şeklindeki sınır koşuludur.

3. TEK TABAKALI SIĞ SU DENKLEMLERİNİN KABUL ETTİĞİ LİE SİMETRİ GRUBUNUN BULUNMASI

Bu bölümde tek tabakalı sığ su denklemlerini değişmez bırakan en genel Lie dönüşüm grubu verilmiştir, (2.3) denklem sistemi için ε bir grup parametresi olmak üzere

$$\tilde{x}=\tilde{x}(x,t,u,h;\varepsilon),\ \tilde{t}=\tilde{t}(x,t,u,h;\varepsilon),\ \tilde{u}=\tilde{u}(x,t,u,h;\varepsilon),\ \tilde{h}=\tilde{h}(x,t,u,h;\varepsilon) \tag{3.1}$$

şeklinde *x,t* bağımsız değişkenleri ve *u,h* bağımlı değişkenlerini içeren bir Lie dönüşüm grubu ele alınmıştır. $\xi^x,\xi^t,\eta^u,\eta^h$ grup değişkenlerinin sonsuz küçükleri olmak üzere ele alınan tek tabakalı sığ su denklemlerinin sonsuz küçük üreteci aşağıdaki şekildedir.

$$V=\xi^x\frac{\partial}{\partial x}+\xi^t\frac{\partial}{\partial t}+\eta^h\frac{\partial}{\partial h}+\eta^u\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.2}$$

Burada tek tabakalı sığ su denklemleri birinci mertebeden kısmı türevli diferansiyel denklemler oldukları için birinci uzanımları alınmıştır ve bu işlemler sonucunda bir belirleyici denklemler takımı elde edilir. Elde edilen belirleyici denklemler için literatürde mevcut olan [8,9,10,11] seri çözüm yöntemi kullanılmıştır ve bu yöntemde sonsuz küçükler bağımlı, bağımsız değişkenlerim kuvvetleri şeklinde yazılarak belirleyici denklemlerde yerine konur, bu şekilde çözüm araştırılır. (2.3) denklem sisteminden elde edilen belirleyici denklemlerde bu yöntem uygulandığı takdirde sonsuz küçüklerin değişkenlerinin kuvvetlerinin arttırılmasıyla elde edilen her bir açılımdan bu denklem sistemi için yeni bir parametre ve dolayısıyla yeni bir Lie dönüşüm grubu bulunabileceği görülmektedir ve dolayısıyla tek tabakalı sığ su denklemleri için bulunabilecek simetri sayısının sonsuz olabileceği anlaşılmaktadır. Bu çalışmada tek tabakalı sığ su denklemlerinin indirgenmesi işleminde sonsuz küçüklerin birinci dereceden kuvvetleri cinsinden seriye açılması sonucunda elde edilen aşağıdaki beş parametreli Lie dönüşüm grubu kullanılmıştır.

$$\xi^x=(2\alpha_1-\alpha_3)x+\alpha_2 t+\alpha_4, \xi^x=(\alpha_1-\alpha_3)t+\alpha_5, \eta^h=2\alpha_1 h, \eta^u=\alpha_1 u+\alpha_2 \tag{3.3}$$

ve bu simetri grubuna karşılık gelen sonsuz küçük üreteçler

$$V_1=2x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}+2h\frac{\partial}{\partial h},\ V_2=\frac{\partial}{\partial t},\quad V_3=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u},\ V_4=-x\frac{\partial}{\partial x}-t\frac{\partial}{\partial t},\ V_5=\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.4}$$

şeklindedir. (3.3) ile gösterilen bu simetri grubuna sahip Lie cebiri L_5 çözülebilir olduğundan tek tabakalı sığ su denklemlerinin indirgenmiş denklemlerinin elde edilmesi mümkündür.

4. SİMETRİ İNDİRGENMESİ

Bu durumda ele alınanan simetri grubu için iki şekilde indirgeme yapılabilir. Bunlardan brincisi parametreler arasındaki ilişkilerin incelenmesi [8,9,10], ikinicisi ise bu simetri grubuna sahip L_5 cebirinin optimal sisteminin elde edilmesidir [12] ve bu çalışma içerisinde iki indirgeme yöntemi kullanılmıştır.

4.1. Optimal Sisteme Göre İndirgeme

Bu çalışmada ele alınan tek tabakalı sığ su denklemleri için, (3.3) Lie simetri grubunun optimal sistemi (i=1,2,3,4,5), β_i'ler birer parametre, κ bir sayısal sabit olmak üzere

$$L_{1,1}^a = \beta_1 V_1,\ L_{1,2}^\kappa = \beta_1 V_1 + \kappa V_2,\ L_{1,3}^a = \beta_1 V_1 + \beta_4 V_4,$$
$$L_{1,4}^\kappa = \beta_1 V_1 + \beta_4 V_4 + \kappa V_5,\ L_{1,5}^\kappa = \beta_1 V_1 + \kappa V_3 + \beta_4 V_4 \quad (4.1)$$

şeklindeki beş tane cebirden oluşmaktadır. Bu alt cebirlerin her biri için indirgenmiş denklemler elde etmek mümkündür. Bunlardan $L_{1,3}^a$ cebirini alalım; $L_{1,3}^a = \beta_1 V_1 + \beta_4 V_4$ için elde edilen benzerlik değişkeni

$$\xi = x t^{(\beta_4 - 2\beta_1)(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \quad (4.2)$$

şeklindedir ve elde edilen bu form boyut analizi yaklaşımıyla elde edilen formlarla aynı yapıdadır. Ayrıca $L_{1,3}^a$ cebiri için elde edilen yeni benzerlik formları ise

$$u(x,t) = t^{\beta_1(\beta_1 - \beta_4)^{-1}},\quad h(x,t) = t^{2\beta_1(\beta_1 - \beta_4)^{-1}} \quad (4.3)$$

şeklinde olup, bu benzerlik formları altında tek tabakalı sığ su denklemlerinin indirgenmiş denklemleri şu şekildedir

$$\begin{aligned} &\tilde{h}(\xi)\tilde{u}'(\xi) + [\tilde{u}(\xi) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}\xi]\tilde{h}'(\xi) + \frac{2\beta_1}{\beta_4}\tilde{h}(\xi) = 0, \\ &[\tilde{u}(\xi) - \frac{\beta_4 - 2\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}\xi]\tilde{u}'(\xi) + \tilde{h}'(\xi) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_4}\tilde{u}(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ayrıca diğer alt cebirler için de karakteristik denklemler yardımıyla yeni benzerlik formları ve indirgenmiş denklemler elde etmek mümkündür.

4.2. Parametreler Arasındaki İlişkilere Göre İndirgeme

Bu simetri indirgeme yönteminde, parametreler için bazı koşullar belirlenir ve bu koşullar altında benzerlik değişkeninin, benzerlik formlarının yapıları incelenerek indirgenmiş denklemler elde edilir. Bu yöntemle bir önceki yöntemle elde edilen benzerlik formları ve indirgenmiş denklemler elde edilebildiği gibi daha farklı yapıda benzerlik formları da elde edilebilmektedir. Örneğin $\alpha_1 = \alpha_3 \neq 0, \alpha_5 \neq 0$ koşulu altında elde edilen benzerlik değişkeni

$$\xi = e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_5}t}[x + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}t + (\alpha_2\alpha_5 - \alpha_4\alpha_1)\alpha_1^{-2} \quad (4.5)$$

olmak üzere, literatürde daha önce değişken akımlı yerçekimi akımları için elde edilen benzerlik değişkeninin yapısından farklı yapıdadır, dolayısıyla bu benzerlik değişkenine karşılık gelen yeni benzerlik yapıları

$$u(x,t) = e^{\frac{\alpha_1}{\alpha_5}t}\tilde{u}(\xi) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, h(x,t) = e^{2\frac{\alpha_1}{\alpha_5}t}\tilde{h}(\xi) \tag{4.6}$$

olarak bulunur. Bu yeni benzerlik yapıları yardımıyla

$$\begin{aligned} &\alpha_5\tilde{h}(\xi)\tilde{u}'(\xi) + [\alpha_5 - \alpha_1\xi]\tilde{h}'(\xi) + 2\alpha_1\tilde{h}(\xi) = 0, \\ &[\alpha_5 - \alpha_1\xi]\tilde{u}'(\xi) + \alpha_5\tilde{h}'(\xi) + \alpha_1\tilde{u}(\xi) = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklindeki indirgenmiş denklemler elde edilir.

5. BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde tek tabakalı sığ su denklemlerinin benzerlik çözümleri, değişken akımın olduğu ve değişken akımın olmadığı durumda elde edilen tüm indirgenmiş denklemler için grup parametrelerine bir takım değerler verilerek araştırılmıştır. (4.2) ifadesi için $\beta_1 = 1, \beta_4 = 4$ alındığında literatürde mevcut olan boyut analizi yaklaşımıyla elde edilen aşağıdaki benzerlik değişkeni ve benzerlik yapılarını bulmak mümkündür [6,7].

$$u(x,t) = t^{-1/3}\tilde{u}(\xi), h(x,t) = t^{-2/3}\tilde{h}(\xi), \xi = \kappa\frac{x}{t^{2/3}} \tag{5.1}$$

(4.4) indirgenmiş denklemler için yukarıdaki parametreler kullanılacak olursa

$$\frac{d}{d\xi}[\tilde{h}(\xi)\tilde{u}(\xi) - 2\xi\tilde{h}(\xi)] = 0, [\tilde{u}(\xi) - 2\xi]\tilde{u}'(\xi) - \tilde{u}(\xi) + \tilde{h}'(\xi) = 0 \tag{5.2}$$

şeklini alır. Bu indirgenmiş denklemler için değişken bir akımın olmadığı durumda $u(0,t) = 0, \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ sınır koşulu altında benzerlik çözümleri araştırıldığı takdirde $\tilde{h}(\xi)\tilde{u}(\xi) - 2\xi\tilde{h}(\xi) = 0$ için $\tilde{h}(\xi) \neq 0$ olması koşulu altında

$$\tilde{u}(\xi) = 2\xi, \tilde{h}(\xi) = \xi^2 + h_0 \tag{5.3}$$

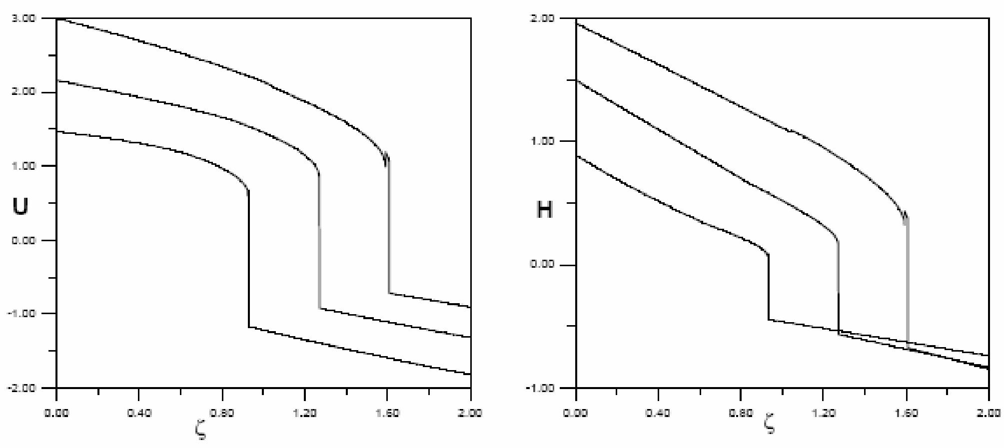
şeklindeki benzerlik çözümleri bulunur. Şimdi de (4.5) ifadesi kullanılsın, $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_5 = 1; \alpha_2, \alpha_4 = 0$ değerleri için

$$u(x,t) = e^{t}\tilde{u}(\xi), h(x,t) = e^{2t}\tilde{h}(\xi), \xi = e^{-t}x \tag{5.4}$$

olarak bulunur. Burada elde edilen benzerlik formları boyut analizi yaklaşımıyla elde edilen benzerlik formlarından farklı yapıdadır ve dolayısıyla değişken bir akım girişi olduğu varsayılarak incelendiği takdirde aşağıdaki gibi yeni benzerlik çözümlerinin elde edileceği görülür. Değişken akımın olduğu durumda: $u(0,t) = e^{t}u_0, h(0,t) = e^{2t}h_0$ şeklindeki sınır koşulları varsayıldığında (4.7) denklem sistemi,

$$\begin{aligned} &\tilde{h}(\xi)\tilde{u}'(\xi) + [\tilde{u}(\xi) - \xi]\tilde{h}'(\xi) + 2\tilde{h}(\xi) = 0, \\ &[\tilde{u}(\xi) - \xi]\tilde{u}'(\xi) + \tilde{h}'(\xi) + \tilde{u}(\xi) = 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

şeklinde bulunur ve bu denklem sistemi için sayısal çözüm yöntemlerinden [13] yararlanılarak elde edilen benzerlik çözümleri ise aşağıda Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2: değişken bir akımın olduğu durumda: ξ'nın aldığı değerlere göre akımın hızı ve derinliği giderek azalmaktadır.

6. SONUÇLAR

Lie grup teorisi, bu çalışma içerisinde boyut analizinin bir genelleştirilmesi olarak ele alınmıştır ve bu çalışmada mevcut tanımı ve kapsamı verilen problem Lie grup analizi kapsamında literatürde ilk defa incelenmiştir ve tek tabakalı sığ su denklemleri için yeni Lie simetri grupları bulunmuştur. Elde edilen yeni simetri gruplarından yola çıkarak tek tabakalı sığ su denklemlerinin Lie simetri sayısının sonsuz olabileceği görüşüne varılmıştır. Ayrıca simetri indirgenmesi için kullanılan yöntemlerden; optimal sistem ile yapılan indirgeme işlemlerine göre parametreler arasındaki ilişkiler bulunarak yapılan indirgeme işlemleriyle daha genel formda indirgenmiş denklemlerin elde edilebileceği anlaşılmıştır. Bu çalışmada, değişken akımlı yerçekimi akımlarının benzerlik çözümleri Lie grup analizi altında incelenerek boyut analizi altında elde edilen benzerlik değişkeninden farklı benzerlik değişkenleri ve buna bağlı olarak grup parametrelerinin bazı özel değerleri için benzerlik çözümlerinin elde edileceği gösterilmiştir.

7. KAYNAKLAR

[1] Simpson, J.E. Gravity currents: in the environment and laboratory, Cambridge University 2 (244), 1997.

[2] Rottman J. W., Grundy R. E. Self-similar solutions of the shallow-water equations representing gravity currents with variable inflow, J. Fluid. Mech. 169(337-351), 1986.

[3] Gratton J., Vigo C. Self-similarity gravity currents with variable inflow revisited: plane currents,J. Fluid. Mech. 258 (77-104), 1994.

[4] Rottman J. W., Grundy R. E., D. P. Hoult Oil spreading on the sea, Ann. Rev. Fluid Mech. 4 (341-368), 1972.

[5] Grundy R. E., J. W. Rottman The approach to self-similarity of the solutions of the shallow-water equations representing gravity current releases, J. Fluid. Mech. 156 (39-53), 1985.

[6] Glaister P. Similarity solutions of the shallow-water equations, Journal of Hydraulic Research 29 (107-116), 1991.

[7] Velan M. S. and Lakshmanan M. Lie Symmetries and invariant solutions of the shallow-water equation, Int. J. Non-linear Mechanics 31 (339-344) ,1996.

[8] Özer T., On symmetry group properties of Benney system and general similarity forms of the Benney equations in the Lagrangian variables, J. Comput. Appl. Math. 169 (297-313), 2004.

[9] Özer T., Symmetry group analysis of Benney system and application for the shallow-water equation,Mech. Res. Comm. 32 (241-254), 2005.

[10] Özer T. , Antar N. The similarity forms and invariant solutions of the two-layer shallow-water equations, Nonlinear Anal. Real World Appl. (In press).

[11] Olver P. J. Applications of Lie groups to differential equations, Springer-Verlag,1986.

[12] Cantwell B. J. An introduction to symmetry analysis, Cambridge texts in applied mathematics, 2002.

[13] McCormick J., Salvadori M. G. Numerical methods in fortran, Prentice-Hall,New Jersey (1965).